

УДК 004.42

## Спектральный подход к анализу структуры GERT-сетевых моделей

Д.И. Ковалев<sup>1,2,\*</sup>, И.В. Ковалев<sup>1,2,3</sup>, Т.П. Мансурова<sup>1</sup>, А.А. Яблокова<sup>1</sup>,  
А.В. Блинников<sup>2,3,4</sup>

1 ККДНиТ, ул. Урицкого, 61, г. Красноярск, 660049, Россия

2 Красноярский государственный аграрный университет, 90, пр. Мира, Красноярск, 660049, Россия

3 Институт Космических и информационных технологий Сибирского федерального университета, ул. Академика Киренского, 26 к.1, Красноярск, 660074, Россия

4 Краевое государственное бюджетное учреждение культуры «Енисей кино», Хранитель фондов отдела хранения и ремонта фильмофонда, 153, ул. Пролетарская, Красноярск, 660100, Россия

\*E-mail: kovalev.dw7@gmail.com

**Аннотация.** В работе рассматривается возможность применения спектрального подхода к анализу структуры GERT-сетевых моделей систем и процессов. Основная идея подхода заключается в преобразовании известного графа до графа с желаемым спектром, что соответствует допустимому графу GERT-сети или графу с максимальной вероятностью завершения процесса за установленное время. Приведены результаты, которые позволяют на начальном этапе анализа GERT-сетевой структуры системы, представленной графом, достаточно простыми методами оценивать соответствие варианта структуры ряду требований, которые предъявляются к системе в целом.

**Ключевые слова:** анализ, структура, спектральный подход, граф, GERT-сеть

## Spectral approach to the structure analysis of GERT-network models

Д.И. Ковалев<sup>1,2</sup>, И.В. Ковалев<sup>1,2,3</sup>, Т.П. Мансурова<sup>1</sup>, А.А. Яблокова<sup>1</sup>,  
А.В. Блинников<sup>2,3,4</sup>

1 Krasnoyarsk Science and Technology City Hall, Uritskogo Street, 61, Krasnoyarsk, 660049, Russia

2 State Agrarian University, Prospect Mira, 90, Krasnoyarsk, 660049, Russia

3 Institute of Space and Information Technologies of the Siberian Federal University, 26, building 1, st. Academician Kirenskiy, Krasnoyarsk, 660074, Russia Krasnoyarsk

4 Regional Government-Owned Publicly Funded Institution of Culture "Enisey Kino", 153, st. Proletarskaya, Krasnoyarsk, 660100, Russia

\*E-mail: kovalev.dw7@gmail.com

**Abstract.** The paper considers the possibility of applying the spectral approach to the analysis of the structure of GERT-network models of systems and processes. The main idea of the approach is to transform a known graph to a graph with the desired spectrum, which corresponds to an admissible graph of a GERT network or a graph with the maximum probability of completing the process within a specified time. The results are presented that allow at the initial stage of the analysis of the GERT-network structure of a system represented by a graph, using fairly simple methods to assess the correspondence of a structure variant to a number of requirements that apply to the system as a whole.

**Keywords:** analysis, structure, spectral approach, graph, GERT-network

## 1. Введение

Системы мониторинга мобильных объектов с использованием спутниковых каналов основаны на активно развивающемся методе обмена информацией между объектами – машинном взаимодействии «Machine-to-machine» (M2M). Этот метод используется для любых объектов, оснащенных устройствами, с которых необходимо получить оперативную информацию. Для мобильных и отдаленных объектов мониторинга используется беспроводной обмен данными. Такой способ, как правило, подразумевает использование связи GSM для передачи данных в точку мониторинга. Радио и сети Wi-Fi используются реже. Основным преимуществом использования связи GSM над последним является широкий охват и предоставление сотовым операторам особых условий для пользователей.

Структура систем мониторинга может быть представлена в виде GERT-сетевой модели [1], которая позволяет на начальном этапе рассмотреть различные варианты формирования взаимодействия между мобильным объектом, например пилотируемым или беспилотным летательным аппаратом (ЛА), и наземным комплексом управления.

В зависимости от назначения и количества объектов могут формироваться различные варианты построения пунктов управления [2]. При небольшом количестве объектов, когда сообщения от объектов приходят не чаще чем одно сообщение в минуту, можно объединить все составляющие пункта управления на одной машине. Для этого необходимо выбрать конфигурацию компьютера, удовлетворяющую всем элементам системы. Вариант полнофункционального пункта управления используется для создания центральных (региональных) центров мониторинга, куда будет стекаться информация от большого количества объектов, и услугами которого будут пользоваться большое количество пользователей. Для создания таких центров необходимо выбрать оптимальную конфигурацию сервера (а может и 2-х кластерную модель сервера), которая смогла бы обеспечить одновременную обработку множества транзакций.

Методы анализа вариантов структуры такой сложной системы предназначены для определения соответствия этих вариантов структуры всем необходимым условиям и ограничениям [1-3]. При GERT-сетевом моделировании [4] структур сложных систем возникает ряд трудностей, которые сопряжены, с одной стороны, с размерностью задачи и глубиной рассматриваемых вопросов, а с другой, - с большим числом вариантов структуры, что определяется числом элементов и связей в системе. Поэтому особый интерес приобретает возможность использования уже известных подходов,

позволяющих сокращать количество детально анализируемых вариантов GERT-сети [5].

Анализ работы [6] показал, что в данной ситуации целесообразным является подход, основанный на анализе спектров графов структур исследуемых GERT-сетей. Спектры графов GERT-сетей позволяют рассчитывать ряд важных числовых инвариантов графа структуры GERT-сети: число ребер, дуг, основных деревьев. Кроме того, можно получить неравенства для других числовых инвариантов: хроматического числа, диаметра. Посредством спектральных чисел устанавливаются свойства регулярности и делимости графов.

Более того, в отдельных случаях построение графов с определенными выделенными свойствами может быть выполнено с использованием спектров. Идея решения заключается в преобразовании известного графа до графа с желаемым спектром. Таким графом может являться допустимый граф GERT-сети или граф с максимальной вероятностью завершения процесса за установленное время.

Таким образом, если о структуре синтезируемой GERT-сетевой модели системы известны какие-либо данные, касающиеся графа сетевой структуры, то можно, используя спектральные методы, составить фильтрующие ограничения, посредством которых будут исключаться из рассмотрения на начальном этапе анализа варианты структуры, не удовлетворяющие требуемым условиям.

## 2. Модели и методы

Основные понятия, определения, а также формальные построения, реализующие свойства спектров графов для решения вышеизложенных задач спектрального анализа структуры GERT-сетевых моделей, представлены в работах [6, 7].

Под графом в этих работах понимается пара  $G(X, Y)$ , где  $X$  - конечное множество вершин;  $Y$  - конечное множество упорядоченных (или неупорядоченных в случае неориентированного графа) пар элементов из  $X$ , называемых ребрами.

Каждому графу  $G$  соответствует матрица смежности  $A$  порядка  $n$ , где  $n$  — число вершин графа. Элемент матрицы  $a_{ij}$ , расположенный на пересечении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца, равен числу ребер, соединяющих вершины  $x_i, x_j \in X$ . Характеристическим многочленом графа  $G$  в рамках данного подхода называется характеристический многочлен матрицы смежности

$$P_G(\lambda) = |\lambda I - A|.$$

Спектр графа  $Sp(G) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  состоит из собственных значений матрицы смежности  $A$ .

В практических приложениях находят применение некоторые другие типы спектров, когда в качестве характеристического многочлена используются многочлены на базе матрицы валентностей неориентированного графа, матрицы полных проводимостей или модифицированной матрицы смежности Зейделя. Для мультиверсионных моделей GERT-сетей используются подходы, ориентированные на стохастический анализ времени реализуемости GERT-сети, оптимизационно-имитационные [8] или биоинспирированные информационные технологии, например, на базе алгоритмов муравьиной колонии (ANT-алгоритмов) [9].

Все приведенные спектры возможно получить из систем линейных уравнений, коэффициенты которых связаны с локальными структурными свойствами графа.

### 3. Результаты

Рассмотрим представленный выше обыкновенный спектр:

$$Sp(G) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}.$$

Соотнесём каждой вершине  $x_i \in X$  графа  $G$  переменную

$$\phi_i, i = \overline{1, n}, n = cardX.$$

Для каждой  $\phi_i$  числовое значение  $\phi_i^0$ , такое, чтобы  $\phi_i^0$  пропорционально сумме  $m_i^0$  всех  $\phi_{i'}^0$  соответствующих соседним вершинам вершины  $x_i$  иначе говоря, имеет место следующее равенство:

$$\frac{m_i^0}{\phi_i^0} = const, \forall i = \overline{1, n}.$$

Тогда  $\phi_i^0, i = \overline{1, n}$  должны удовлетворять системе однородных линейных уравнений с некоторым  $\lambda$ :

$$\lambda \phi_i = \sum_{k * i} \phi_k, i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

где запись  $k * i$  означает, что  $x_k$  является соседней вершиной вершины  $x_i$ .

В [6] показано, что представляют интерес только нетривиальные решения.

Для случая мультиверсионной реализации GERT-сети [5] интерес представляет ситуация, если  $G$  – мультиграф. Тогда кратность  $a_{ik}$  смежности вершин  $x_i, x_k$  учитывается  $a_{ik}$  раз в сумме правой части уравнения (1).

Перепишем систему линейных уравнений (1) в матрично-векторном виде (2)

$$\lambda \bar{\phi} = A \bar{\phi}, \quad (2)$$

где  $A$  - матрица смежности графа  $G$ ;  $\bar{\phi} = (\phi_1, \dots, \phi_n)^T$  - вектор -столбец с элементами  $\phi_i, i = \overline{1, n}$ .

Необходимым и достаточным условием существования нетривиального решения системы уравнений (2) по теореме Кронекера—Капелли является

$$|\lambda I - A| = P_G(\lambda) = 0.$$

Отсюда следует, что возможные коэффициенты  $X$  совпадают с собственными значениями графа  $G$ .

Основной результат здесь заключается в том, что множество допустимых коэффициентов пропорциональности исчерпывается множеством собственных значений графа  $G$ .

Если технические приложения требуют определения веса  $\phi_i$  с учетом пропорциональности его не сумме  $m_i^0$ , а среднему значению всех  $\phi_i^0$ , соответствующих вершинам, соседним по отношению к вершине  $x_i$ , то приходим к системе уравнений (3)

$$\lambda \phi_i = \frac{1}{d_i} \sum_{k \in N_i} \phi_k, \quad i = \overline{1, n}, \quad (3)$$

где  $d_i$  - валентность вершины  $x_i$ .

В других обозначениях система уравнений (3) приобретает следующий вид:

$$\lambda D \bar{\phi} = A \bar{\phi}.$$

В результате приходим к анализу характеристического уравнения

$$Q_G(\lambda) = \frac{1}{|D|} |\lambda D - A| = |\lambda I - AD^{-1}|.$$

Как и ранее, заключаем, что множество коэффициентов пропорциональности в уравнениях исчерпывается спектром  $SP(G)$ .

#### 4. Заключение

Таким образом, кроме описания структурных свойств графа линейными уравнениями возможен более общий подход, заключающийся в использовании систем квадратичных уравнений, и дальнейшее обобщение состоит в соединении функциональных уравнений с локальными характеристиками графа.

Итак, в работе приведены результаты, которые позволяют на начальном этапе анализа GERT- сетевой структуры системы, представленной графом, достаточно простыми методами оценивать соответствие варианта структуры ряду требований, которые предъявляются к системе. В частности, для оценки эффективности допустимой реализации GERT-модели достаточно иметь значения таких характеристик, как связность, кратность смежных вершин, число замкнуты контуров графа структуры системы и т. п.

Предложенный спектральный подход к анализу структуры GERT-сетевых моделей позволяет обеспечить, в том числе, и в интересах наземных эксплуатационных служб [10, 11] анализ вариантов структуры систем мониторинга траектории движения воздушных судов в экстремальных природно-климатических условиях с использованием спутниковых радионавигационных систем, обеспечивая сбор данные о местоположении ЛА в труднодоступных районах, и по результатам выполненного анализа передавать координаты ЛА наземным службам.

### **Благодарности**

Проведение исследований осуществляется при поддержке КГАУ «Красноярский краевой фонд поддержки научной и научно-технической деятельности» в рамках проекта «Контроль траектории полета воздушных судов в экстремальных условиях Арктики и Крайнего Севера» в соответствии с заявкой 2021110907918.

### **Список литературы**

1. Зенюткин, Н. О способах формирования информационных структур для моделирования объектов, сред и процессов / Н. Зенюткин, Д. Ковалев, Е. Туев, Е. Туева // Современные инновации, системы и технологии - Modern Innovations, Systems and Technologies. – 2021. – Том 1. – Выпуск 1. – С. 10-22. <https://doi.org/10.47813/2782-2818-2021-1-1-10-22>.
2. Ковалев, И. К вопросу формирования блочно-модульной структуры системы управления беспилотных летательных объектов / И. Ковалев, В. Лосев, М. Сарамуд, А. Калинин, А. Лифарь // Современные инновации, системы и технологии - Modern Innovations, Systems and Technologies. – 2021. – 1(3). – 48-64. <https://doi.org/10.47813/2782-2818-2021-1-3-48-64>.
3. Ковалев, Д.И. Обзор подходов и методов к оценке сравнительной эффективности технологических процессов и производств / Д.И. Ковалев, М. Козлова,

- О. Ольшевская, Т. Мансурова // Современные инновации, системы и технологии - Modern Innovations, Systems and Technologies. – 2021. – 1(3). – С. 1-21. <https://doi.org/10.47813/2782-2818-2021-1-3-1-21>.
4. Ермолаева, Л.В. GERT-сетевая модель формирования производственных процессов / Л.В. Ермолаева // Современные наукоемкие технологии. – 2007. – № 11. – С. 121-122
  5. Ковалев И.В. Модели ГЕРТ-сетей для различных способов применения методологии мультиверсий / И.В. Ковалев, П.В. Зеленков, М.В. Сарамуд, Г.А. Сидорова, В.В. Брезицкая // Сибирский аэрокосмический журнал. – 2013. – №1(47). URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/modeli-gert-setey-dlya-razlichnyh-sposobov-primeneniya-metodologii-multiversiy> (дата обращения: 03.12.2021).
  6. Дмитриев, А.К. Основы теории построения и контроля сложных систем / А.К. Дмитриев, П.А. Мальцев. – Л.: Энергоатомиздат, 1988. – 192 с.
  7. Цветкович Д. Спектры графов, теория и применение / Д. Цветкович, М. Дуб, Х. Захс. – Киев: Наукова думка, 1984.
  8. Карцан, И. Построение наземных пунктов управления космическими аппаратами с использованием оптимизационно-имитационной модели / И. Карцан // Современные инновации, системы и технологии - Modern Innovations, Systems and Technologies. – 2021. – 1(2). – С. 64-71. <https://doi.org/10.47813/2782-2818-2021-1-2-64-71>.
  9. Буховцев, Д.Д. (2021). Применение модифицированного алгоритма муравьиной колонии для решения задачи календарного планирования распределенных предприятий / Д.Д. Буховцев // Современные инновации, системы и технологии - Modern Innovations, Systems and Technologies. – 2021. – 1(1). – С. 29-42. <https://doi.org/10.47813/2782-2818-2021-1-1-29-42>.
  10. Лукьянов, О.Е. Влияние наземного ремонта на надёжность летательных аппаратов / О.Е. Лукьянов, Г.И. Рыжов // «Наука, технологии, общество - НТО-2021»: сборник научных статей по материалам Всероссийской научной конференции (Красноярск, 29-31 июля 2021 г.). – Красноярск: Красноярский краевой Дом науки и техники. – 2021. – С. 22-28. DOI:10.47813/dnit-nto.2021.22-28.
  11. Чижикова, Л.А. Исследование зависимости функций, режимов ЛА и математическое моделирование потоков данных БКУ / Л.А. Чижикова // «Наука, технологии, общество - НТО-2021»: сборник научных статей по материалам Всероссийской научной конференции (Красноярск, 29-31 июля 2021 г.). Красноярск: Красноярский краевой Дом науки и техники. – 2021. – С. 79-87. DOI:10.47813/dnit-nto.2021.79-87.