УДК 33.05, 517

Решение задачи о минимизации затрат производства изделий, изготовленных четырьмя технологическими способами

А.Г. Пантелеева, В.И. Усков*

Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г.Ф. Морозова, ул. Тимирязева, 8, Воронеж, 394087, Россия

* E-mail: vum1@yandex.ru

Аннотация. Для функции четырех переменных строится квадратичная форма (лемма 1), с помощью которой определяются условия наличия в ней глобального минимума (теорема 2). Полученные результаты применяются при решении задачи о минимизации затрат на производство изделий, изготовленных четырьмя технологическими способами.

Ключевые слова: функция четырех переменных, квадратичная форма, экстремум, минимизация затрат, производство

Solution the problem of minimizing the production costs of products manufactured by four technological methods

A.G. Panteleeva, V.I. Uskov*

Voronezh State University of Forestry and Technologies named after G.F. Morozov, 8 Timiryazeva st., Voronezh, 394087, Russia

* E-mail: vum1@yandex.ru

Abstract. For a function of four variables, a quadratic form is constructed (lemma 1), with the help of which the conditions for the presence of a global minimum in it (theorem 2) are determined. The results obtained are used to solve the problem of minimizing the cost of manufacturing products manufactured by four technological methods.

Keywords: function of four variables, quadratic form, extremum, minimization the production costs, products

1. Необходимое и достаточное условие экстремума функции четырех переменных

Рассматривается функция четырех переменных $u = f(w, x, y, z)$. Предположим, что эта функция дважды непрерывно дифференцируема по совокупности переменных в точке $M(w_0, x_0, y_0, z_0)$.

Теорема 1 (необходимое условие экстремума). Если функция u дифференцируема и в точке M имеет экстремум, то имеют место следующие равенства:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial w}\right|_M = 0; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = 0; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M = 0; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M = 0.$$

Доказательство. Если функция u дифференцируема и в точке M имеет экстремум, то ее дифференциал равен нулю в этой точке [1]:

$$du|_{\mathrm{M}} = 0. \tag{1}$$

Далее,

$$\mathrm{du} = \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{w}}\mathrm{dw} + \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}}\mathrm{dx} + \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}}\mathrm{dy} + \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{z}}\mathrm{dz}. \tag{2}$$

Если в последнем выражении взять $dx = dy = dz = 0$, $dw \neq 0$, то условие (1) влечет равенство $\left.\frac{\partial f}{\partial w}\right|_M = 0$; если же в нем взять $dw = dy = dz = 0$, $dx \neq 0$, то условие (1) приводит к равенству $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_M = 0$ и т.д. Тем самым, теорема доказана.

Лемма 1 (формула второго дифференциала для функции четырех переменных).

$$\begin{gathered}\mathrm{d}^2\mathrm{u} = \frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{w}^2}(\mathrm{dw})^2 + \frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}^2}(\mathrm{dx})^2 + \frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}^2}(\mathrm{dy})^2 + \frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{z}^2}(\mathrm{dz})^2 + \\ +2\frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{w}\,\partial \mathrm{x}}\mathrm{dwdx} + 2\frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{w}\,\partial \mathrm{y}}\mathrm{dwdy} + 2\frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{w}\,\partial \mathrm{z}}\mathrm{dwdz} + \\ +2\frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}\,\partial \mathrm{y}}\mathrm{dxdy} + 2\frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}\,\partial \mathrm{z}}\mathrm{dxdz} + 2\frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}\,\partial \mathrm{z}}\mathrm{dydz}.\end{gathered} \tag{3}$$

Выражение получается взятием дифференциала от выражения (2) с применением к нему свойства линейности с последующей группировкой слагаемых. К примеру, одно из слагаемых имеет вид:

$$\mathrm{d}\left(\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{w}}\mathrm{dw}\right) = \frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{w}^2}(\mathrm{dw})^2 + \frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{w}\,\partial \mathrm{x}}\mathrm{dwdx} + \frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{w}\,\partial \mathrm{y}}\mathrm{dwdy} + \frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{w}\,\partial \mathrm{z}}\mathrm{dwdz}.$$

Далее, для квадратичной формы (3) второго дифференциала составим матрицу Гессе

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial w^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Теорема 2 (достаточное условие минимума). *Пусть функция* u *имеет экстремум в точке* M. *Если в этой точке выполнены следующие условия:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial w^2} > 0; \quad \det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial w^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \end{pmatrix} > 0;$$

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial w^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} > 0; \quad \det H > 0,$$

то в ней функция достигает глобального минимума.

Доказательство. Если второй дифференциал (3) в точке M положителен: $d^2u|_M > 0$, то функция u в ней имеет минимум [1]. В силу критерия Сильвестра [2] квадратичная форма является положительно определенной, если все угловые миноры матрицы Гессе (4) этой квадратичной формы положительны, что и доказывает теорему.

2. Решение задачи

Воспользуемся полученными результатами для решения следующей задачи минимизации затрат на производство [3].

*Задача***.** По плану производства предприятию необходимо изготовить *N* единиц продукции. Она может быть изготовлена четырьмя технологическими способами. При производстве *w* единиц первым способом затраты равны $f_1(w) = a_0 + a_1 w + a_2 w^2$ руб.; при производстве *x* единиц вторым способом они составляют $f_2(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$ руб.; при производстве *y* единиц третьим способом они составляют $f_3(y) = c_0 + c_1 y + c_2 y^2$ руб.; а при производстве *z* единиц четвертым способом они равны $f_4(z) = d_0 +$

ISBN 978-5-6045165-2-2

$d_1z + d_2z^2$ руб. Все коэффициенты при вторых степенях в функциях затрат полагаются ненулевыми. Определить, сколько единиц продукции каждым из способов следует изготовить, чтобы затраты были минимальными.

Для решения задачи вводятся следующие обозначения:

$$\gamma_0 = a_0 + b_0 + c_0 + d_0, \qquad \gamma_{k+1} = \frac{1}{2^k}\left(\frac{a_1^k}{a_2} + \frac{b_1^k}{b_2} + \frac{c_1^k}{c_2} + \frac{d_1^k}{d_2}\right), \quad k = 0,1,2,$$

$$\gamma_4 = \frac{\gamma_2 + N}{\gamma_1}.$$

Замечание. Отметим, что $\gamma_4 > 0$.

*Решение***.** Составляем математическую модель задачи. Функция затрат — это

$$F = F(w, x, y, z) = f_1(w) + f_2(x) + f_3(y) + f_4(z).$$

Требуется минимизировать затраты, т.е. $F \to \min$, при выполнении условия ограничения – суммарное количество единиц изделий равно N:

$$w + x + y + z = N.$$

По смыслу задачи все переменные неотрицательны.

Получили задачу на условный экстремум. Для ее решения воспользуемся методом Лагранжа.

1. Запишем ограничение в виде $G = G(w, x, y, z) = 0$, где $G = w + x + y + +z - N$, и составим функцию Лагранжа $L = L(w, x, y, z, \lambda)$

$$L = F + \lambda G.$$

2. Пользуясь необходимым условием экстремума (теорема 1), составим систему:

$$a_1 + 2a_2w + \lambda = 0, \qquad b_1 + 2b_2x + \lambda = 0,$$

$$c_1 + 2c_2y + \lambda = 0, \qquad d_1 + 2d_2z + \lambda = 0,$$

$$w + x + y + z - N = 0.$$

Решив эту систему, получим подозрительную на экстремум точку

$$M = \left(-\frac{a_1 + \lambda}{2a_2}, -\frac{b_1 + \lambda}{2b_2}, -\frac{c_1 + \lambda}{2c_2}, -\frac{d_1 + \lambda}{2d_2}\right),$$

где $\lambda = -2\gamma_4 < 0$.

ISBN 978-5-6045165-2-2

3. Далее, вычисления показывают, что вторые частные производные функции L равны

$$\frac{\partial^2 L}{\partial w^2}=2a_2,\ \ \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}=2b_2,\ \ \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}=2c_2,\ \ \frac{\partial^2 L}{\partial z^2}=2d_2,$$

а все вторые смешанные частные производные равны нулю. Следовательно, матрица Гессе (4) – это

$$H=\begin{pmatrix} 2a_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2d_2 \end{pmatrix}.$$

Применим теорему 2: при совместном выполнении условий

$$a_2>0,\ \ b_2>0,\ \ c_2>0,\ \ d_2>0 \qquad (5)$$

в точке M затраты на производство минимальны.

4. Вычислим этот минимум:

$$F_{min}=F(M)=\gamma_0+\frac{\gamma_3}{2}+\gamma_1\gamma_4^2.$$

3. Полученный результат

Таким образом, при выполнении условий (5) требуется изготовить

$$\frac{2\gamma_4-a_1}{2a_2}\ \text{ед. изделий первым способом,}$$

$$\frac{2\gamma_4-b_1}{2b_2}\ \text{ед. изделий вторым способом,}$$

$$\frac{2\gamma_4-c_1}{2c_2}\ \text{ед. изделий третьим способом,}$$

$$\frac{2\gamma_4-d_1}{2d_2}\ \text{ед. изделий четвертым способом,}$$

чтобы затраты на производство были минимальными и составляли

$$\gamma_0+\frac{\gamma_3}{2}+\gamma_1\gamma_4^2\ \text{ у. е.}$$

Список литературы

ISBN 978-5-6045165-2-2

1. Кудрявцев, Л.Д. Курс математического анализа в 3-х томах / Л.Д. Кудрявцев. – М.: Дрофа, 2004. – Т. 2. – 720 с.
2. Гельфанд, И.М. Лекции по линейной алгебре / И.М. Гельфанд. – М.: Добросвет, МЦНМО, 1998. – 320 с.
3. Красс, М.С. Математика в экономике. Математические методы и модели / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. – М.: Финансы и статистика, 2007. – 544 с.

ISBN 978-5-6045165-2-2